2.19) a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = Ax$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

Para hallar $[T]_{B1}^{B2}$, siendo $B1 = \{(1,0), (0,1)\}$, la canónica de $\mathbb{R}^2$ y $B2 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, la canónica de $\mathbb{R}^3$, busco primero los transf. de los vectores de $B1$, y luego las coordenadas de estas transf. con respecto a $B2$.

$$T([1\ 0]^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}_{B2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$T([0\ 1]^T) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}_{B2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Entonces: $[T]_{B1}^{B2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = A$

Analizo prop. de $[T]_{B1}^{B2}$:

Busco el $Nul([T]_{B1}^{B2})$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \to x_1 = -2x_2 \to x_1 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \to -6x_2 + 4x_2 = 0 \to x_2 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 = 0 \to 0 = 0 \ ✓ \end{cases}$$

Por lo que $Nul([T]_{B1}^{B2}) = \{0\}$, y por lo tanto, T es monomorfismo.

Por Teorema de la dimensión, busco $\dim(\mathrm{Im}([T]_{B_1}^{B_2}))$:

$$\underbrace{\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^2)}_{=2} = \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}([T]_{B_1}^{B_2})) + \underbrace{\mathrm{Dim}(\mathrm{Nu}([T]_{B_1}^{B_2}))}_{=0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}([T]_{B_1}^{B_2})) = 2 \neq \mathrm{Dim}(\mathbb{R}^3)$$

Por lo tanto, $\mathrm{Col}([T]_{B_1}^{B_2}) \neq \mathbb{R}^3 \rightarrow$ T no es epimorfismo

Como ~~...~~ solo es monom., T no es isomorfismo.

b) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x) = Ax$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Para hallar $[T]_{B_1}^{B_2}$, siendo B_1 la canónica de $\mathbb{R}^3$ y B_2 la canónica de $\mathbb{R}^2$, busco primero los transf. de los vectores de B_1 y luego las coordenadas de estas transf. en la base B_2.

$$T([1\ 0\ 0]^T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T([0\ 1\ 0]^T) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$T([0\ 0\ 1]^T) = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Entonces: $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = A.$

Analizo prop. de $[T]_{B_1}^{B_2}$:

Busco $Nul([T]_{B_1}^{B_2})$:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3=0 \rightarrow x_1=-3x_2-5x_3 \rightarrow \quad x_1=x_3. \\ 2x_1+4x_2+6x_3=0 \rightarrow -6x_2-10x_3+4x_2+6x_3=0 \rightarrow x_2=-2x_3 \end{cases}$$

$\rightarrow \bar{x}$ que cumplen $\rightarrow \bar{x}=(x_3,-2x_3,x_3)=x_3.(1,-2,1)$

Como $Nul([T]_{B_1}^{B_2}) \neq \{0\} \rightarrow$ T no es monomorfismo.

Por teorema de la dimensión, busco $dim(Im([T]_{B_1}^{B_2}))$:

$$\underbrace{Dim(\mathbb{R}^3)}_{=3} = Dim(Im([T]_{B_1}^{B_2})) + \underbrace{Dim(Nu([T]_{B_1}^{B_2}))}_{=1} \rightarrow$$

$\rightarrow Dim(Im([T]_{B_1}^{B_2}))=2=Dim(\mathbb{R}^2)$

Por lo tanto $Col([T]_{B_1}^{B_2})=\mathbb{R}^2 \rightarrow$ T es epimorfismo.

Como no es monom., T no es isomorfismo.

c) $T: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(p)=[p(0) \ \ p(1) \ \ p(10) \ \ p(100)]^T$

Para hallar $[T]_{B_1}^{B_2}$, siendo $B_1=\{1,x,x^2,x^3\}$, la canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ y B_2 la canónica de $\mathbb{R}^4$, busco primero las transf. de los vectores de B_1, y luego las coord. de estas transf. en B_2:

$T(1)=[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \rightarrow [1\,1\,1\,1]^T_{B_2}=[1\,1\,1\,1]^T$

$T(x)=[0 \ 1 \ 10 \ 100]^T \rightarrow [0 \ 1 \ 10 \ 100]^T_{B_2}=[0 \ 1 \ 10 \ 100]^T$

$T(x^2)=[0 \ 1 \ 100 \ 10000]^T \rightarrow [0 \ 1 \ 100 \ 10000]^T_{B_2}=[0 \ 1 \ 100 \ 10000]^T$

$T(x^3)=[0 \ 1 \ 1000 \ 1000000]^T \rightarrow [0 \ 1 \ 1000 \ 100000]^T_{B_2}=[0 \ 1 \ 1000 \ 1000000]^T$

Por lo tanto: $[T]_{B_1}^{B_2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 1 & 100 & 10000 & 1000000 \end{bmatrix}$

Analizo prop. de $[T]_{B_1}^{B_2}$:

Busco $Nul([T]_{B_1}^{B_2})$:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 10x_2 + 100x_3 + 1000x_4 = 0 \\ x_1 + 100x_2 + 10000x_3 + 1000000x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 1 & 100 & 10000 & 1000000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_1 - F_3 \\ F_4 \to F_1 - F_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -10 & -100 & -1000 \\ 0 & -100 & -10000 & -1000000 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_3 \to 10F_2 - F_3 \\ F_4 \to 100F_2 - F_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 90 & 990 \\ 0 & 0 & 9900 & 999900 \end{pmatrix} F_4 \to 110F_3 - F_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 90 & 990 \\ 0 & 0 & 0 & -891000 \end{pmatrix}$$

$\to$ Ec:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_2 - x_3 - x_4 = 0 \to x_2 = 0 \\ 90x_3 + 990x_4 = 0 \to x_3 = 0 \\ -891000x_4 = 0 \to x_4 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $Nul([T]_{B_1}^{B_2}) = \{0\} \to$ T es monomorfismo.

Por teorema de la dim. busco $Dim(Im([T]_{B_1}^{B_2}))$:

$$\underbrace{Dim(\mathbb{R}_3[x])}_{=4} = Dim(Im([T]_{B_1}^{B_2})) + \underbrace{Dim(Nu([T]_{B_1}^{B_2}))}_{=0} \to$$

$\to Dim(Im([T]_{B_1}^{B_2})) = 4 = Dim(\mathbb{R}^4)$

Por lo tanto, $Col([T]_{B_1}^{B_2}) = \mathbb{R}^4 \to$ T es epimorfismo.

Como es monom. y epim., T es isomorfismo.

d) $T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(0) & p'(1) \end{bmatrix}$

Para hallar $[T]_{B_1}^{B_2}$ siendo $B_1 = \{1, x, x^2\}$, la canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y B_2 la canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, busco primero los transf. de los vectores de B_1 y luego las coord. de esos transf. en B_2.

$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$T(x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\to [T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Analizo prop. de $[T]_{B_1}^{B_2}$

Busco $Nul\left([T]_{B_1}^{B_2}\right)$:

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \to x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \to 0 = 0 ✓ \end{cases}$

Por lo tanto $Nul\left([T]_{B_1}^{B_2}\right) = \{0\}$, entonces

<u>T es monomorfismo.</u>

Por teorema de la dimensión, busco $Dim(Im([T]_{B_1}^{B_2}))$:

$$\underbrace{Dim(\mathbb{R}_2[x])}_{=3} = Dim(Im([T]_{B_1}^{B_2})) + \underbrace{Dim(Nu([T]_{B_1}^{B_2}))}_{=0} \rightarrow$$

$$\rightarrow Dim(Im([T]_{B_1}^{B_2})) = 3 \neq \underbrace{Dim(\mathbb{R}^{2\times 2})}_{=4}$$, por lo tanto,

$col([T]_{B_1}^{B_2}) \neq \mathbb{R}^{2\times 2} \rightarrow$ T no es epimorfismo.

Como no es epimorfismo, T no es isomorfismo.